2. DECOMPOSIZIONE ai VALORI SINGOLARI

def: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. $\|A\| = \max\limits_{\|x\|_{\mathbb{C}^n}=1} \|Ax\|_{\mathbb{C}^m}$

l'unica differenza è che qui ho 2 spazi diversi, ma sui due spazi in generale posso mettere la stessa norma

PROP: $\|A\|_2 \overset{def}{=} \max\limits_{\|x\|_{2,\mathbb{C}^n}=1} \|Ax\|_{2,\mathbb{C}^m} = \rho^{1/2}(A^H A)$ ← N.B. $A^H A$ è quadrata

$\|A\|_F = tr^{1/2}(A^H A)$

PROP: $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarie. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$:

$$\|U^H A V\|_2 = \|A\|_2$$

$$\|U^H A V\|_F = \|F\|_F$$

dim: $\|U^H A V\|_2 = \rho^{1/2}((U^H A V)^H (U^H A V))$

$\overset{!}{=} \rho^{1/2}(V^H A^H U U^H A V) = \rho^{1/2}(V^H A^H A V)$ $\quad V^H A^H A V \underset{simile}{\sim} A^H A$

$\overset{!}{=} \rho^{1/2}(A^H A) = \|A\|_2$

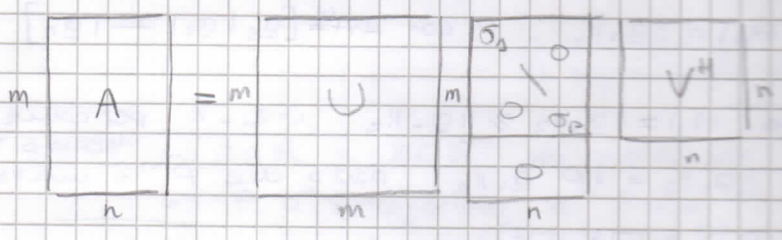
2.1 ESISTENZA

TEO: (di ESISTENZA)

$A \in \mathbb{C}^{m\times n} \Rightarrow \exists\, U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarie t.c. $A = U\Sigma V^H$ con

$\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ t.c. $\sigma_{ij} = \begin{cases} 0 & se\ i\neq j \\ \sigma_i & se\ i=j \end{cases}$ $\quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ (*)

con $p = \min(m,n)$.



30/10/2012
(5)

OSS: Anche se la matrice A è a valori complessi la matrice Σ è a valori reali!

dim: Vediamolo nel caso $m \geq n$ altrimenti si fa il ragionamento su A^H e poi si rigira.

Per induzione.

(I) $n=1$ ossia $A = \underline{a} \in \mathbb{C}^m$

consideriamo la matrice di Householder $\mho$

$\mho \underline{a} = \alpha \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} [1] \quad \Rightarrow \sigma_1 = \alpha$

moltiplichiamo a sx per $\mho^H$ che poiché $\mho^H = \mho^{-1} = \mho$ e otteniamo:

$$\underline{a} = \mho \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} V^H \quad con \quad V^H = [1]$$

(II) Lasciamo un attimo perdere l'induzione e facciamo un passo intermedio.

Si sceglie $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ t.c. $\|x\|_2 = 1$ e t.c. $\|A\|_2 = \|Ax\|_2$ (*)

$\underline{y} \in \mathbb{C}^m$ t.c. $y = \frac{Ax}{\|Ax\|_2}$ (**) $\longrightarrow$ ovviamente $\|y\|_2 = 1$

Poi prendo anche $V_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $U_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitarie con prima colonna rispettivamente $\underline{x}$ e $\underline{y}$

Ossia: $V_1 = [\underline{x}, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n]$ e $U = [\underline{y}, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_m]$

pongo $\sigma_1 = \|A\|_2$. (***)

$\Rightarrow$ vale $A\underline{x} \underset{(**)}{=} \|A\underline{x}\|_2 \underline{y} \underset{(*)}{=} \|A\|_2 \underline{y} \underset{(***)}{=} \sigma_1 \underline{y}$ (a)

Si pone $A_1 = U_1^H A V_1$ e vogliamo studiare la prima colonna di questa matrice.

$$A_1 \underline{e}_1 = U_1^H A V_1 \underline{e}_1 = U_1^H A \underline{x} \underset{(a)}{=} \sigma_1 U_1^H \underline{y} = \sigma_1 \|\underline{y}\|_2^2 \underline{e}_1$$

$= \sigma_1 \underline{e}_1$

perché U_1 è unitaria e y è la sua prima colonna

E quindi possiamo concludere che

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \underline{w}^H \\ \hline \underline{0} & B \end{array}\right]$$

con $\underline{w} \in \mathbb{C}^{n-1}$ e $B \in \mathbb{C}^{n\times 1 \times n-1}$ (che non sappiamo cosa sono)

Ora vogliamo dimostrare che $\underline{w} = 0$ così poi possiamo usare l'induzione ☺.

Supponiamo per assurdo che $\underline{w} \neq 0$.
Consideriamo:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \underline{w} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Abbiamo $\|\underline{z}\|_2^2 = \sigma_1^2 + \|\underline{w}\|_2^2 > 0$ perché $\|\underline{w}\|_2^2 > 0$

$$A_1 \underline{z} = \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \underline{w}^H \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 + \underline{w}^H \underline{w} \\ \hline B\underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\underline{z}\|_2^2 \\ \hline B\underline{w} \end{bmatrix}$$

$$\|A_1 \underline{z}\|_2^2 = \|\underline{z}\|_2^4 + \|B\underline{w}\|_2^2 \geq \|\underline{z}\|_2^4$$

Quindi otteniamo

$$\frac{\|A_1 \underline{z}\|_2^2}{\|\underline{z}\|_2^2} \geq \|\underline{z}\|_2^2 = \sigma_1^2 + \|\underline{w}\|_2^2$$

Ma sappiamo che per def. di norma matriciale

$$\frac{\|A_1 \underline{z}\|_2^2}{\|\underline{z}\|_2^2} \leq \|A_1\|_2^2 = \|A\|_2^2 = \sigma_1^2$$

Mettendo insieme le relazioni ottengo

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_1^2 + \|\underline{w}\|_2^2$$

ma questo è possibile sse $\|\underline{w}\|_2 = 0$ sse $\underline{w} = 0$. ok

$$\Rightarrow A_1 = \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & B \end{array}\right]$$

Ora voglio verificare che sia possibile ordinare i σ_i come nella tesi.

Mi basta vedere che $\sigma_1 \geq \|B\|_2$

Abbiamo:

$$\sigma_1^2 = \|A_1\|_2^2 = \rho(A_1^H A_1) = \rho\left(\left[\begin{array}{c|c} \sigma_1^2 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & B^H B \end{array}\right]\right)$$

$$= \max(\sigma_1^2, \rho(B^H B)) \geq \rho(B^H B) = \|B\|_2^2$$

(III) Ora applichiamo l'hp di induzione.
Supponiamo la tesi valga per matrici $k \times (n-1)$ con $k \geq n-1$
Allora vale per B e quindi:

$$B \underset{\text{hp ind.}}{=} U_2 \Sigma_2 V_2^H \quad \text{svd} \quad \left.\begin{array}{l} U_2 \in \mathbb{C}^{m-1 \times m-1} \\ V_2 \in \mathbb{C}^{n-1 \times n-1} \end{array}\right\} \text{unitarie}$$

$$\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{m-1 \times n-1} \quad \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$$

Abbiamo:

$$A_1 = U_1^H A V_1 = \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & \underset{U_2 \Sigma_2 V_2}{\overset{\shortparallel}{B}} \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & U_2 \end{array}\right]}_{\text{unitaria}} \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & \Sigma_2 \end{array}\right] \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & V_2^H \end{array}\right]}_{\text{unitaria}}$$

Quindi:

$$A = \underbrace{U_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & U_2 \end{array}\right]}_{:= U} \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & \Sigma_2 \end{array}\right] \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & V_2^H \end{array}\right] V_1^H}_{:= V^H} \quad \blacksquare$$

OSS: U e V non sono univocamente determinate. Infatti:
se $A = U \Sigma V^H$ e $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ di fase e $Z \in \mathbb{C}^{m-n \times m-n}$ unitaria
allora posso riscrivere A come:

$$A = U \left[\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & Z \end{array}\right] \Sigma S^H V^H$$

def: I σ_i si dicono **VALORI SINGOLARI** della matrice.
Inoltre se chiamo $\underline{u}_i$ le colonne di U e $\underline{v}_i$ le colonne di V
gli $\underline{u}_i$ si dicono **VETTORI SINGOLARI SINISTRI** mentre $\underline{v}_i$ **VETTORI SINGOLARI DESTRI**.

OSS: Questa dimostrazione <u>NON</u> ci dice come calcolare la decomposizione ai valori singolari di A. (e questo mi rende molto triste)

Vediamo una RAPPRESENTAZIONE ALTERNATIVA della decomposizione:

PROP: $A \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow A = U \Sigma V^H = \sum_{i=1}^{\min(m,n)=p} \sigma_i \underline{u}_i \cdot \underline{v}_i^H$ (somma di diadi)

dim: Abbiamo:

$$A = [\underline{u}_1 | \overset{p+1}{—} | \underline{u}_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_p \\ \hline & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1^H \\ | \\ \underline{v}_n^H \end{bmatrix}$$

(colonne silenti di U)

$$= [\sigma_1 \underline{u}_1 | — | \sigma_p \underline{u}_p] \begin{bmatrix} \underline{v}_1^H \\ | \\ \underline{v}_n^H \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \underline{u}_i \cdot \underline{v}_i^H \quad \blacksquare$$

UTILIZZO – Procedimento di calcolo di Golub

$$A\underline{v}_j = \left(\sum_{i=1}^{p} \sigma_i \underline{u}_i \underline{v}_i^H\right)\underline{v}_j = \sigma_j \underline{u}_j \underbrace{\underline{v}_j^H \underline{v}_j}_{=1} = \sigma_j \underline{u}_j \qquad \underline{v}_i^H \underline{v}_j = 0 \;\; i\neq j$$

$$A^H\underline{u}_j = \left(\sum_{i=1}^{p} \sigma_i \underline{v}_i \underline{u}_i^H\right)\underline{u}_j = \qquad = \sigma_j \underline{v}_j$$

Quindi:

$$A^H(A\underline{v}_j) = A^H(\sigma_j \underline{u}_j) = \sigma_j(A^H\underline{u}_j) = \sigma_j^2 \underline{v}_j$$

ovvero σ_j^2 è autovalore della matrice A^HA relativamente all'autovettore $\underline{v}_j$

E infine otteniamo che: $\underline{u}_j = \dfrac{A\underline{v}_j}{\sigma_j}$

OSS: Anche dal punto di vista numerico calcolare A^HA non dà problemi e inoltre il calcolo degli autovalori di A^HA è un problema ben condizionato perché A^HA è hermitiana.

Vediamo ora delle proprietà dell'SVD

TEO: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $\quad A = U\Sigma V^H \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_p = 0$. Allora:

1. $A = U_k \Sigma_k V_k^H$ con $U_k = [\underline{u}_1 | \dots | \underline{u}_k]$; $V_k = [\underline{v}_1 | \dots | \underline{v}_k]$

$= \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \underline{u}_j \underline{v}_j^H \qquad \Sigma_k = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ (def pos.)

dim: Abbiamo: $A = [U_k \,|\, U'_{m-k}] \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^H \\ \hline V_{n-k}'^H \end{bmatrix} = U_k \Sigma_k V_k^H$ ok ■

2. $\ker(A) = \langle \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n \rangle$

dim: Prendiamo $x \in \mathbb{C}^n$. $\quad w = Ax = U\Sigma V^H x$

$w = 0 \iff z = \underbrace{\Sigma V^H x}_{\in \mathbb{C}^m} = 0$ perché U è non singolare

sse $z = \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^H \\ \hline V_{n-k}^H \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \Sigma_k V_k^H \underline{x} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}k \\ \}m-k \end{array} = 0$

sse $\Sigma_k V_k^H \underline{x} = 0$ sse $V_k^H \underline{x} = 0$ sse $\underline{x} \perp \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$

sse $x \in \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ ■

3. $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{C}^n : y = Ax \;\; x \in \mathbb{C}^n\} = \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k \rangle$

e in particolare $rk(A) = k$

dim: $y \in \mathbb{C}^n \quad y = Ax = U_k \Sigma_k V_k^H \underline{x}$ pongo $z_k = \Sigma_k V_k^H \underline{x} \in \mathbb{C}^k$

ma allora $y = U_k z_k$ comb. lineare delle prime k colonne di U ok

viceversa:

$$z = \Sigma_1 V_k^H \underline{x} = \begin{bmatrix} \Sigma_k V_k^H \underline{x} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

ha rango max

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \;\; \exists z \neq 0$ t.c. $y = U_k z_k$ ■

4. $\sigma_i^2(A) = \lambda_i(A^H A) \qquad i = 1, \ldots, p$

$\|A\|_2 = \sigma_1 \qquad \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2$

dim: $A^H A = (U \Sigma V^H)^H (U \Sigma V^H)$

$\stackrel{!}{=} V \Sigma^T \underbrace{U^H U}_{=1} \Sigma V^H = V \Sigma^T \Sigma V^H$

Ma $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_p \\ 0 \end{bmatrix}$, quindi $\Sigma^T \Sigma = [\Sigma_p \mid 0] \begin{bmatrix} \Sigma_p \\ 0 \end{bmatrix} = \Sigma_p^2 = \mathrm{diag}(\sigma_i^2)$

Ma dato che V è unitaria $A^H A$ ha gli stessi autovalori di $\Sigma^T \Sigma$.

$\Rightarrow \|A\|_2^2 = \rho(A^H A) \underset{\text{perché simili}}{=} \rho(\Sigma^T \Sigma) = \sigma_1^2$ perché i σ_i sono ordinati

$\|A\|_F^2 = tr(A^H A) = tr(\Sigma^T \Sigma) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2$ ■

5. Se $m = n$ e A hermitiana allora:

$\sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$

e i vettori sing sx e dx sono autovettori.

→ quindi per avere che la dec agli autoval ≡ svd deve essere hermit e def + pos!

dim: Abbiamo:

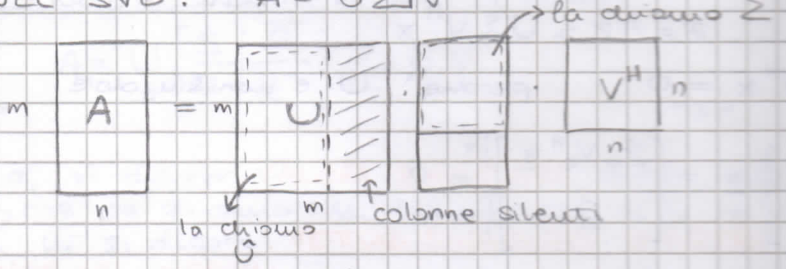
$A = U \Lambda U^H$ dec. agli autovalori

$A^H A = U \Lambda^2 U^H$

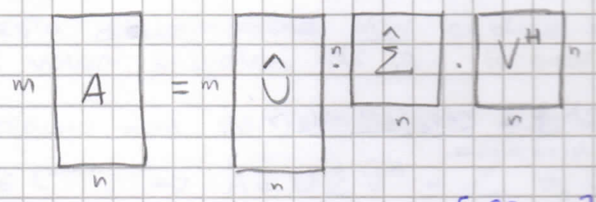
Ma allora:

$\sigma_i^2(A) \underset{4.}{=} \lambda_i(A^H A) = \lambda_i^2(A) \rightarrow \sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$ ■

FULL SVD: $A = U \Sigma V^H$



REDUCED SVD:



ovvero visto che l'informazione mi è data da $\hat{\Sigma}$ mi può essere utile scriverla così per averla quadrata.

⑥

31/10/2012

ESEMPIO: Prendiamo $A = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} -65 & 76 & 104 \\ 76 & -206 & 8 \\ 104 & 8 & 109 \end{bmatrix}$ simmetrica

- Λ : $A = U \Lambda U^H$

  Facendo i conti otteniamo $\Lambda = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad U = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

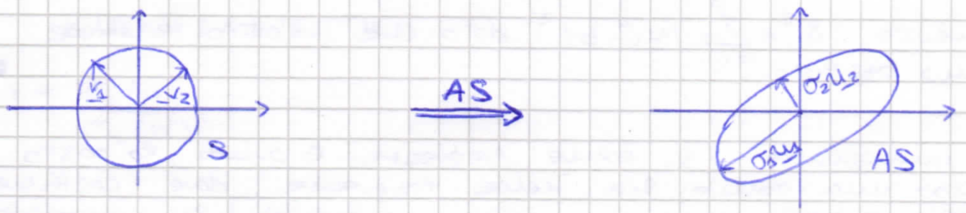
- Σ : $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 1$ (perché $\sigma_i = |\lambda_i|$)

  E quindi $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad V = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -7 \\ -8 & 1 & -4 \\ -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ (la U rimane la stessa)

2.2 INTERPRETAZIONE GEOMETRICA SVD

Se considero la sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ e la sottopongo all'azione di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ottengo un iperellisse in $\mathbb{R}^m$.

ESEMPIO: $n = m = 2$



$\sigma_i u_i$ semiassi principali

σ_i lunghezza dei semiassi prin.

Quindi abbiamo $A = U\Sigma V^H$

$\rightsquigarrow AS = U\Sigma V^H S$ $\quad$ V^H è isometria quindi $V^H S$ è ancora una sfera

- $V^H S$ $\quad$ sfera (ruotata/riflessa ma rimane ecc)
- $\Sigma(V^H S)$ $\quad$ trasforma in un'ellisse
- $U(\Sigma V^H S)$ $\quad$ lascia l'ellisse con la stessa forma, ma la ruota/riflette. (è sempre isometria)

2.3 PROBLEMA ai MINIMI QUADRATI:

Pb: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $\quad m >> n$ $\quad$ (m = # di dati, n = grado polinomio che voglio ottenere come polinomio appros.)

In generale $Ax = b$ non ha soluzione in senso classico

(praticamente è impossibile che le abbia, metti che voglio polinomio di grado 3 e ho 1000 dati è molto difficile 🙂)

Allora si cerca $x^* \in \mathbb{C}^n$ t.c. $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{C}^n} \|Ax - b\| = \gamma$

questo è equivalente a trovare x^* soluzione di

$$A^H A x = A^H b \quad \leftarrow \text{sistema delle equazioni normali}$$

(andrebbe dimostrato 🙂)

TEO: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $rk(A) = k$, $m \geq n \geq k$, $A = U\Sigma V^H$. Allora:

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^H \cdot b}{\sigma_i} \cdot v_i$$

è un num perché $u_i^H b$ è prod scal

ove x^* è la soluzione del problema sopra.

Inoltre:

$$\gamma^2 = \sum_{i=k+1}^{n} |u_i^H \cdot b|^2$$

dim: $\|A x - b\|_2^2 \underset{U \text{ isom}}{=} \|U^H(Ax - b)\|_2^2 = \|U^H A V V^H x - U^H b\|_2^2 \underset{A = U\Sigma V^H}{=}$

$= \|\Sigma V^H x - U^H b\|_2^2$ $\quad$ chiamiamo $y = V^H x$

$\overset{!}{=} \|\Sigma y - U^H b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |\sigma_i y_i - u_i^H \cdot b|^2$ $\quad$ $\sigma_i = 0$ se $i > k$

$\overset{!}{=} \sum_{i=1}^{k} |\sigma_i y_i - u_i^H b|^2 + \sum_{i=k+1}^{p} |u_i^H b|^2$ qui non compare y quindi non ci posso fare nulla per minimizzare

devo minimizzare questo termine
$\rightarrow$ pongo tutti i termini $= 0$

$$\Rightarrow y_i^* = \begin{cases} \dfrac{u_i^H \cdot b}{\sigma_i} & i = 1, \dots, k \\ 0 & i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

Dato che $y^* = V^H x^*$ e V isom. $\|y^*\|_2 = \|x^*\|_2$

Inoltre:

$$x^* = Vy^* = \sum_{i=1}^{k} y_i^* \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\underline{u}_i^H \cdot \underline{b}}{\sigma_i} \cdot \underline{v}_i$$

Chiaramente $\gamma^2 = \sum_{i=k+1}^{p} |\underline{u}_i^H \cdot \underline{b}|^2$ dato che l'altro termine l'abbiamo ottenuto. ■

OSS: Noi possiamo immaginare i $\underline{v}_i$ come frequenze. E quindi la nostra soluzione sarà una comb. lin. delle frequenze, dove i coefficienti dipendono dai valori σ_i.
Se ho delle informazioni su come sono i $\underline{v}_i$ e i σ_i posso capire quali frequenze sono "più importanti".
Tutto questo per dire che l'SVD mi può aiutare a fare un'analisi della soluz.

2.4 PSEUDO INVERSA di MOORE-PENROSE

def: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $rk(A) = k$, $A = U\Sigma_1 V^H$ dico PSEUDO INVERSA

$$A^+ = V\Sigma_1^+ U^H$$

ove $\Sigma_1^+ = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^+ & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_k^+ & 0 \\ & & & \ddots \; 0 \end{array}\right]$ con $\sigma_i^+ = \begin{cases} 1/\sigma_i & i = 1, \dots, k \\ 0 & i = k+1, \dots, p \end{cases}$

Abbiamo che:

$$A^+A = V\Sigma^+U^H U\Sigma V^H = V\Sigma^+\Sigma V^H = V \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$$

OSS: Se tutti i σ_i fossero $\neq 0$ allora otterrei $A^+A = 1$

La pseudo inversa è più che altro uno strumento teorico per l'analisi, anche perché è molto sensibile al cambio di rango.

ESEMPIO: $A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 6 & -8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad A = U\Sigma_A V^H \quad \Sigma_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$rk = 1$

$$V = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Abbiamo $A^+ = V\Sigma_A^+ U^H$ con $\Sigma_A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Perturbiamo il sistema con $\delta A = \frac{\varepsilon}{15}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -8 & -6 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad \varepsilon \neq 0$

$A + \delta A = U\Sigma_{A+\delta A} V^H$ con $\Sigma_{A+\delta A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ cambio il rango!!

$(A+\delta A)^+ = V\Sigma_{A+\delta A}^+ U^H$ con $\Sigma_{A+\delta A}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon & 0 \end{bmatrix}$

Abbiamo che $\|\delta A\|_2 = |\varepsilon|$ ma

$\|(A+\delta A)^+ - A^+\|_2 = 1/\varepsilon$ ROBA BRUTTISSIMA

OSS: Se non ho il cambio di rango di solito le cose vanno un po' meglio. ☺ Cmq non è uno strumento che si usa nella pratica.

Vediamo allora cosa ce ne facciamo ☺

def: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $rk(A) = k$, definisco **NUMERO di CONDIZIONAMENTO**

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^+\|$$

OSS: $K_2(A) = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_k(A)}$

OSS: Consideriamo $\sigma_i((A^HA)^+)$.

Ho: $A = U\Sigma V^H$

$$A^HA = V\Sigma^T\Sigma V^H \qquad \text{con} \qquad \Sigma^T\Sigma = \left[\Sigma_p \mid 0\right]\left[\frac{\Sigma_p}{0}\right] = \Sigma_p^2 = \operatorname{diag}(\sigma_1^2(A), \dots, \sigma_p^2(A))$$

$$\Rightarrow \sigma_i((A^HA)^+) = \frac{1}{\sigma_i^2(A)} \qquad i = 1, \dots, k$$

E quindi:

$$K_2(A^HA) = \frac{\sigma_1(A^HA)}{\sigma_k(A^HA)} = \frac{\sigma_1^2(A)}{\sigma_k^2(A)} = K_2^2(A)$$

Quindi non è detto che sia indolore passare dal sistema al sistema delle eq. normali. Perché se A è brutta, A^HA lo è molto di più.

Conclusione: usare le eq. normali come ultima spiaggia a meno che la sia proprio bella.

2.5 CONDIZIONAMENTO del PROBLEMA del CALCOLO dei V. SING.

TEO: $A, \delta A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

$$\Rightarrow |\sigma_i(A+\delta A) - \sigma_i(A)| \le \sigma_1(\delta A) = \|\delta A\|_2$$

Ovvero il problema è ben condizionato!

N.B.: Questo non è vero per gli autovalori! Quindi l'SVD è più oneroso dal punto di vista del calcolo ma ci dà un risultato sempre affidabile!

ESEMPIO: $A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix}$ $\quad \delta A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\varepsilon&0&0&0 \end{bmatrix}$ (sembra un'innocua perturbazione ☺)

Abbiamo $|\sigma_i(A+\delta A) - \sigma_i(A)| \le |\varepsilon| = \|\delta A\|_2$ quindi il problema è ben posto.

Vediamo cosa succede con gli auto-valori:

$$|\lambda_i(A+\delta A) - \lambda_i(A)| \le \sqrt[4]{|\varepsilon|}$$

Ho: $\sigma_1(A) = \sigma_2(A) = \sigma_3(A) = 1$ e $\sigma_4(A) = 0$

$$\sigma_1(A+\delta A) = \sigma_2(A+\delta A) = \sigma_3(A+\delta A) = 1 \quad \text{e} \quad \sigma_4(A) = |\varepsilon|$$

Mentre: $\lambda_i(A) = 0 \quad \forall i$

$$\lambda_i(A+\delta A) = \mu_i \quad \text{t.c.} \quad \mu_i^4 = \varepsilon$$

Se per esempio $\varepsilon = 10^{-8}$ per i valori singolari ho una perturb. di 10^{-8} mentre per gli autovalori è 10^{-2}.
Non è disastroso ma nemmeno bello, perché cambia cmq l'ordine di grandezza!

TEO: $A \in \mathbb{C}^{m\times n} \Rightarrow \sigma_k(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \sigma_1(A) \quad \forall i$

dim: Sia $Ax = \lambda x \qquad x \neq 0$

Considero la quantità $x^H A^H A x = |\lambda|^2 x^H x = |\lambda|^2 \|x\|_2^2$

$A^H A \underset{svd}{=} V \Sigma^T U^H U \Sigma V^H = V \Sigma^2 V^H$

$x^H A^H A x = x^H V \Sigma^2 V^H x \underset{y = V^H x}{=} y^H \Sigma^2 y = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 |y_i|^2$

$\Rightarrow \sigma_k^2 \|y\|_2^2 \leq x^H A^H A x \leq \sigma_1^2 \|y\|_2^2$

$\Rightarrow \sigma_k^2 \|y\|_2^2 \leq |\lambda|^2 \|x\|_2^2 \leq \sigma_1^2 \|y\|_2^2$

E quindi segue la tesi dato che $\|x\|_2 = \|y\|_2$ visto che V è isom. ∎

OSS: Supponiamo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ non singolare.

Abbiamo visto che $K_2(A) = \dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$

Vale anche che $K_2(A) \geq \dfrac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$ per quanto appena visto

e vale l'= se la matrice è normale (in particolare hermit. va bene) altrimenti ho il $\geq$.

Quindi se ho matrici non normali (tipo non hermit.) per studiare il condizionamento devo guardare i valori sing perché gli autovalori mi dicono poco!
(il termine a dx potrebbe essere piccolo ma quello a sx grande)

6/11/2012

2.6 ALGORITMO PER CALCOLO SVD

$A \in \mathbb{C}^{m\times n} \qquad m \geq n \qquad p = \min\{m,n\}$

① $\sigma_i^2(A) = \lambda_i(A^H A)$ quindi per calcolare i σ_i devo solo calcolare gli autovalori di $A^H A$

Come calcoliamo gli autovalori?

fatt. di schur

Un idea è quella di scrivere $A^H A = Q D Q^H$ con Q unitaria, D diagonale

con METODO QR PER GLI AUTOVALORI. (che vedremo)

② Se oltre ai valori singolari voglio anche U e V^H dobbiamo vedere come fare.

Per prima cosa calcoliamo la fattorizzazione QR con max pivot per colonne di:

$$C = AQ$$

ove Q è la matrice ottenuta al pto ① con la fattorizz. di shur

Abbiamo: $C\Pi = UR \qquad U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitaria

matrice permutazione colonne

$R = \begin{bmatrix} R_p \\ 0 \end{bmatrix} \qquad R_p \in \mathbb{C}^{n\times n}$ triang. sup. con (autoval) reali positivi e ordinati.

elementi sulla diagonale (cioè gli autovalori)

Quindi: $A = CQ^H = UR\Pi^T Q^H \underset{V = Q\Pi}{=} URV^H$

Ora vogliamo mostrare che questa è una SVD.

- U è unitaria? Si perchè arriva da fatt. QR
- V è unitaria? Si perchè prodotto di unitarie
- R_p è diagonale? Va dimostrato, perchè al momento sappiamo solo che è triang. sup.

$$A^H A = (Q \Pi R^H U^H)(U R \Pi^T Q^H) = Q \Pi R^H R \Pi^T Q^H$$

$$R^H R = \left[R_p^H \mid 0 \right] \left[\begin{array}{c} R_p \\ \hline 0 \end{array} \right] = R_p^H R_p$$

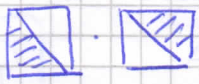
$$= Q \Pi R_p^H R_p \Pi^T Q^H$$

Ma ricordiamoci anche che al pto ① avevamo $A^H A = Q D Q^H$ e la Q è la stessa!

E quindi otteniamo: $D = \Pi R_p^H R_p \Pi^T$

Deve essere: $\Pi^T D \Pi = R_p^H R_p$

D è diagonale $\rightarrow$ $\Pi^T D \Pi$ rimane diagonale perchè faccio la stessa permutazione di righe e colonne.

$R_p^H R_p$ potrebbe essere piena, perchè è  che può riempirsi!

$R_p^H R_p$ può essere diagonale sse R_p è diagonale!

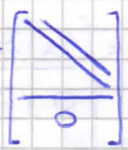
$\Rightarrow R_p$ è diagonale

Inoltre ha l'ordinamento richiesto sugli autovalori perchè abbiamo usato QR con pivot max.

Ora che abbiamo il metodo vogliamo vedere il costo computazionale e renderlo più efficiente possibile.
Sul pto ② c'è poco da fare, quindi vediamo il pto ①

① NELLA PRATICA:

Si calcola la forma di Schur di $B^H B$ con B matrice "bidiagonale" superiore a elementi reali:

B = 

Abbiamo che $B^H B$ è tridiagonale, simmetrica, semidef. positiva.

Perchè lo facciamo? Per ridurre il costo computazionale! (OBIETTIVO FINALE)

Come possiamo da A a B?

BIDIAGONALIZZAZIONE di $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$: trasformazione mediante matrici unitarie (Metodo Golub-Reinsch)

Supponiamo di aver $PAH = \left[\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array} \right]$ con $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bidiag. P, H unitarie

verifichiamo che effettivamente questa cosa ci vada bene:

$$A^H A = H \left[B^H \mid 0 \right] P P^H \left[\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array} \right] H^H = H B^H B H^H \sim B^H B$$

quindi ci piace molto, perchè hanno gli stessi autovalori (che sono quello che stiamo cercando)

Usare B al posto di A ci piace anche perché calcolare $B^H B$ è molto più bello che $A^H A$.

A questo punto faccio la fattorizzazione di $B^H B$

$$B^H B = Q_B D_B Q_B^H \qquad \begin{array}{l} Q_B \text{ unitaria} \\ D_B \text{ diag autoval. di } B^H B \end{array}$$

$$\Rightarrow A^H A = H Q_B D_B Q_B^H H^H = Q D Q^H \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} Q = H Q_B \text{ unitaria} \\ D = D_B \end{array}$$

Ora dobbiamo vedere come trovare P e H in modo da avere

$$B = PAH \quad \text{bidiagonale superiore a elem. reali}$$

P, H unitarie.
(Così da trasformare $A^H A$ in $B^H B$ tridiag.)

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & & \ddots & \alpha_n \\ \hline & & 0 & \end{bmatrix}$$

Schematizziamo quello che faremo:

quindi al primo passo azzero la prima sottocolonna con una matrice di Householder al secondo azzero la prima sottoriga ecc...

Alla fine devo azzerare n sottocolonne e $n-2$ sottorighe.

$$A^{(1)} = A$$

$$A^{(2)} = P^{(1)} A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \underline{c}_1^H \\ \hline \underline{0} & \tilde{A}^{(2)} \end{array}\right] \quad \text{con } P^{(1)} \text{ matrice elementare di Householder}$$

Ora considero $K^{(1)}$ matrice elementare di Householder t.c.

$$K^{(1)} \underline{c}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \underline{0} \end{bmatrix}$$

e definisco $H^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & K^{(1)} \end{array}\right]$

$$\Rightarrow A^{(3)} = A^{(2)} H^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \underline{c}_1^H \\ \hline \underline{0} & \tilde{A}^{(2)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & K^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \underline{c}_1^H K^{(1)} \\ \hline \underline{0} & \tilde{A}^{(2)} K^{(1)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \beta_1 \mid \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & \end{array}\right]$$

Quindi in generale avremo:

$$\left.\begin{array}{l} A^{(2k)} = P^{(k)} A^{(2k-1)} \quad \leftarrow \text{azzero colonne} \\ A^{(2k+1)} = A^{(2k)} H^{(k)} \quad \leftarrow \text{azzero righe} \end{array}\right\} k = 1, \dots, n-2$$

$$\left.\begin{array}{l} A^{(2n-2)} = P^{(n-1)} A^{(2n-3)} \\ A^{(2n-1)} = P^{(n)} A^{(2n-2)} \end{array}\right. \quad \text{azzero le ultime 2 sottocolonne}$$

In conclusione:

$$PAH = \begin{bmatrix} B \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

con $P = P^{(n)} \cdot \ldots \cdot P^{(1)}$ unitarie.
$H = H^{(1)} \cdot \ldots \cdot H^{(n-2)}$

Ora però non è detto che B sia a elementi reali. In generale con questa procedura otteniamo B a elementi complessi, quindi dobbiamo fare ancora una trasformazione.

MODULARIZZAZIONE dei COEFFICIENTI $\quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C} \rightsquigarrow$ coeff in $\mathbb{R}$

$$B = \begin{bmatrix} B_p \\ \hline \underline{0} \end{bmatrix} \qquad \text{con} \quad B_p = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_{n-1} \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Si considerano $S, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrici di fase t.c.
↳ sono unitarie

$$S B_p T = \begin{bmatrix} |\alpha_1| & |\beta_1| & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & |\beta_{n-1}| \\ & & & |\alpha_n| \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Verificare per esercizio che possiamo prendere S e T definite in questo modo:

$$t_{11} = 1 \qquad\qquad s_{11} = |\alpha_1|$$

$$t_{ii} = \frac{|\beta_{i-1}|}{\beta_i \, s_{i-1,i-1}} \qquad s_{ii} = \frac{|\alpha_i|}{\alpha_i \, t_{ii}} \qquad i = 2, \dots, n$$

In conclusione abbiamo:

$$\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{bmatrix} P^{(n)} \cdot \dots \cdot P^{(1)}}}_{= P} \cdot A \cdot \underbrace{\boxed{H^{(1)} \cdot \dots \cdot H^{(n-2)} \cdot T}}_{= H}$$

Ora rimane da vedere il metodo QR per gli autovalori, che però è un metodo che vediamo più in generale, non solo per le matrici della forma $A^H A$.

Vediamo cosa faremo in generale per ridurre il costo computazionale quando abbiamo un problema con una matrice A

A piena generica $\rightsquigarrow$ Hessenber superiore 

A piena hermitiana $\rightsquigarrow$ tridiagonale (versione simmetrica della hes. superiore)

Ricordiamo inoltre il seguente Teorema sul condizionamento degli autoval.

def: Una **NORMA** si dice **ASSOLUTA** se $\forall D$ diagonale $\|D\| = \max_{i=1,\dots,n} |d_{ii}|$.

TEO: Sia $\|\cdot\|$ n. m. indotta assoluta. ← cmq poi le norme sono tutte equivalenti quindi non mi interessa questa restriz.
Sia $A = S \Lambda S^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\delta A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (S matrice autovettori)

$$\Rightarrow \min_{i=1,\dots,n} |\lambda(A + \delta A) - \lambda_i(A)| \le K(S) \|\delta A\|$$

↑ (non so qual'è l'autoval corrispondente (!))

Quindi S mal condizionata ⇒ problema può essere mal condizionato

OSS: Però se A è hermitiana so che S è unitaria e $K_2(S) = \|S\|_2 \|S^{-1}\|_2 = 1$
e quindi è ben condizionato.

dim: (TEO) $\mu = \lambda(A + \delta A)$. Se μ è autoval di A allora ho 0 e ho finito.
Se μ non è autoval di A ⇒ $A - \mu I$ è non sing.

$(A+\delta A)\underline{y} = \mu \underline{y} \quad \to \quad \delta A\, \underline{y} = -(A-\mu I)\underline{y}$

e quindi $\quad (A-\mu I)^{-1}\delta A\, y = -y$

Abbiamo:

$$\|-y\| = \|(A-\mu I)^{-1}\delta A\, y\| \le \|(A-\mu I)^{-1}\delta A\|\,\|y\|$$

$$\Rightarrow \|(A-\mu I)^{-1}\delta A\| \ge 1$$

con $(A-\mu I)^{-1} = S(\Lambda-\mu I)^{-1}S^{-1}$.

Abbiamo:

$$1 \le \|S(\Lambda-\mu I)^{-1}S^{-1}\delta A\| \le \|S\|\,\|(\Lambda-\mu I)^{-1}\|\,\|S^{-1}\|\,\|\delta A\|$$

$K(S)$

Ma $\|\ \|$ è assoluta e quindi:

$$\|(\Lambda-\mu I)^{-1}\| = \max_{i=1,\dots,n}\left|\frac{1}{\lambda_i(A)-\mu}\right| = \frac{1}{\min_{i=1,\dots,n}|\lambda_i(A)-\mu|} \quad \blacksquare$$

7/11/2012

2.7 TRIDIAGONALIZZAZIONE di A (→ HESSENBERG sup)

Il metodo QR per gli autovalori è molto costoso se applicato a matrici piene, perché vedremo che fa una fattorizzazione QR a ogni iterazione.

Abbiamo visto ieri che l'idea è di trasformare prima A in una matrice più "bella" (i.e. hessenberg superiore / tridiagonale)

$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Poniamo:

SCHEMA:

$A^{(1)} = A$

$A^{(k+1)} = T_k^{-1}A^{(k)}T_k$ con $T_k = I-\beta_k \underline{v_k}\,\underline{v_k}^T$ m. el. di householder tale che $T_k(A^{(k)})$ ha tutti gli elementi della k-esima sottocolonna nulli

$T = T_1\cdots T_{n-2}$ unitaria

$\Rightarrow A^{(n-1)} = T^{-1}AT = B \underset{\text{simile}}{\sim} A$ B hessenberg superiore

Vediamo nel particolare come facciamo.

$k=1 \quad A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}^{(1)} & \underline{b}_1^H \\ \hline \underline{a}_1 & B_1 \end{array}\right]$ $\quad P_1\in\mathbb{C}^{n-1,n-1}$ m. el. di householder t.c. $P_1\underline{a}_1 = \alpha_1\underline{e}_1$

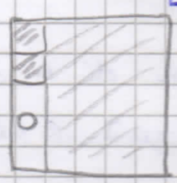
Supponiamo che P_1 esiste, poniamo

$T_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & P_1 \end{array}\right]$ è hermitiana unitaria (perché P_1 lo è)

Vediamo che T_1 fa quello che deve:

$$A^{(2)} = T_1^{-1}A^{(1)}T_1 = T_1A^{(1)}T_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & P_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} a_{11}^{(1)} & \underline{b}_1^H \\ \hline \underline{a}_1 & B_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^H \\ \hline \underline{0} & P_1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} a_{11}^{(1)} & \underline{b}_1^H P_1 \\ \hline P_1\underline{a}_1 & P_1B_1P_1 \end{array}\right] =$$



Al generico passo k avrò:

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & a_{kk}^{(k)} & b_k^H \\ \hline \underline{0} & \underline{a}_k & B_k \end{array}\right]$$

già a posto

Prendo $P_k \in \mathbb{C}^{n-k \times n-k}$ m. el. di householder t.c. $P_k \underline{a}_k = \alpha_k \underline{e}_1$

e definisco $T_k = \left[\begin{array}{c|c} I_k & \\ \hline & P_k \end{array}\right]$ che rimane hermitiana unitaria

Tutto questo ha un costo, che non è poco ed è $\boxed{\frac{5n^3}{3}}$ (se uso le householder, se usassi le Givens, che però non ho definito, sarebbe il doppio)

Cosa succede se A è hermitiana? Voglio trasformarla in una tridiagonale. Vediamo se applicando la trasformazione che abbiamo definito in generale funziona.

La differenza è che

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}^{(1)} & \underline{a}_1^H \\ \hline \underline{a}_1 & B_1 \end{array}\right] \quad \text{ovvero } \underline{b}_1 = \underline{a}_1$$

e quindi se sostituisco $\underline{b}_1 = \underline{a}_1$ nei conti precedenti ho

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}^{(1)} & \underline{a}_1^H P_1 \\ \hline P_1 \underline{a}_1 & P_1 B_1 P_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}^{(1)} & \bar{\alpha}_1 \underline{e}_1^T \\ \hline \alpha_1 \underline{e}_1 & P_1 B_1 P_1 \end{array}\right]$$

e quindi funziona. Inoltre $P_1 B_1 P_1$ è ancora hermitiana e quindi al generico passo k avrò ancora $\underline{b}_k = \underline{a}_k$ e quindi tutto funziona bene:

$$A^{(k)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;\; k-1 & 1 & n-k \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} C_k & \underline{b}_k & 0 \\ \hline \underline{b}_k^H & a_{kk}^{(k)} & \underline{a}_k^H \\ \hline 0 & \underline{a}_k & B_k \end{array}\right] \end{array} \quad \text{con } \underline{b}_k = \left[\begin{array}{c} \underline{0} \\ \hline \bullet \end{array}\right] \}{k-1}$$

C_k tridiagonale

e T_k la definisco come prima e funziona tutto.

Ora che abbiamo visto che torna tutto in teoria, vediamo cosa succede in pratica. In realtà vedremo che le P_k non le calcoleremo mai esplicitamente.

$$P_k B_k P_k = (I - \beta_k \underline{u}_k \underline{u}_k^H) B_k (I - \beta_k \underline{u}_k \underline{u}_k^H)$$

$$= B_k - \beta_k \underline{u}_k \underline{u}_k^H B_k - \beta_k B_k \underline{u}_k \underline{u}_k^H + \beta_k^2 \underline{u}_k \underline{u}_k^H B_k \underline{u}_k \underline{u}_k^H$$

questo è un numero quindi lo sposto come mi pare

$$= B_k - \underline{u}_k \left[\beta_k \underline{u}_k^H B_k - \tfrac{1}{2}\beta_k (\underline{u}_k^H \beta_k B_k \underline{u}_k) \underline{u}_k^H\right] + \dots$$

$$- \left[\beta_k B_k \underline{u}_k - \tfrac{1}{2}\beta_k (\underline{u}_k^H \beta_k B_k \underline{u}_k) \underline{u}_k\right] \underline{u}_k^H =$$

Poniamo $\underline{r}_k = \beta_k B_k \underline{u}_k$; $\underline{q}_k = \underline{r}_k - \frac{1}{2}\beta_k (\underline{r}_k^H \underline{u}_k) \underline{u}_k$ (numero)

$$= B_k - \underline{u}_k \underline{q}_k^H - \underline{q}_k \underline{u}_k^H$$

Quindi anzi che dover fare un prodotto matrice per matrice $(P_k B_k P_k)$ $[n^2]$ e formare le matrici P_k, non devo formare le matrici, e devo fare dei prodotti vettore · matrice e delle diadi (vettore · vettore) [ho $2(n-k)^2$ op. moltiplicative] $\leq n^2$ ☺

Quindi dato che $k = 1, \dots, n-2$ ho alla fine $\sum_{k=1}^{n-2} 2(n-k)^2 \simeq \boxed{\frac{2n^3}{3}}$

In realtà dobbiamo vedere che l'algoritmo che abbiamo usato è anche stabile.

TEO: $\tilde{B}$ effettivamente calcolata è simile a una matrice "vicina" a A, ossia $\exists$ Q unitaria, δA t.c.

$$\tilde{B} = Q(A+\delta A)Q$$

$$\|\delta A\|_F \leq \gamma u \|A\|_F \qquad \gamma = \gamma(n) \text{ polinomiale in } n \text{ di grado basso.}$$

Ovvero l'algoritmo è stabile, quindi trasformare la matrice in una più bella non ci dà problemi e lo possiamo fare.

28 METODO QR per gli AUTOVALORI

Vediamo gli "ingredienti" del metodo:

- riduzione in forma hessenberg
- tecniche di shift
- tecniche di riduzione della dimensione della matrice.

IDEA di BASE del METODO (FRANCIS - '61)

- metodo iterativo
- per ottenere $A = WTW^H$ (schur) $\quad$ W unitaria, T triang sup, $diag(T) = \Sigma_A$

Genera una successione di matrici $\{A_k\}$ (indice di iterazione, non c'entra più con la dim)

Pongo $A_1 = A$, per $k \geq 1$

- calcolo la fatt. QR di $A_k = Q_k R_k$ $\quad$ Q_k unit. R_k triang. sup.
- definisco $A_{k+1} = R_k Q_k$

(e vai avanti fino a che "qualche criterio di arresto ti ferma").

Vediamo che queste matrici sono tutte simili:

dato che $A_k = Q_k R_k \rightarrow R_k = Q_k^H A_k$ (Q_k è unit.)

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^H A_k Q_k \quad \text{ok.}$$

quindi le A_k hanno tutte gli stessi autovalori.

La cosa poco ovvia è come queste trasformazioni riescono a farmi emergere la forma di schur.

OSS: vediamo qui che ad ogni passo ho una fattorizz. QR.
Quanto ci costa?

A piena $\rightsquigarrow O(n^3)$

A hessenb. $\rightsquigarrow O(n^2)$

A tridiag $\rightsquigarrow O(n)$

Il punto è, io parto da $A = A_1$ hessenberg sup., ma allora A_2 è ancora hessenberg sup? se NO tutto quello che ho fatto per trasformare A è inutile!

PROP: Se $A_k = Q_k R_k \in \mathcal{H}$ (hess. sup) $\Rightarrow A_{k+1} = R_k Q_k \in \mathcal{H}$

dim: Mostriamo che $Q_k \in \mathcal{H}$.

$Q_k = P_1 \dots P_{n-1}$ elem. di Householder (NB $\dim(Q_k) = n$)

Abbiamo che $P_i \in \mathcal{H}$ e anche $P_i P_{i+1} \in \mathcal{H}$. Infatti:

P_1 e' t.c. $P_1 \underline{x} = \alpha \underline{e}_1$ e $P_1 = I - \beta \underline{v}\underline{v}^H$

e abbiamo visto che $\underline{v} = \underline{x} - \alpha_1 \underline{e}_1$ (ovvero è $\underline{x}$ a meno della 1ª componente)

Dato che la matrice è hess sup, $\underline{x}$ è nella forma

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ \underline{0} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{e quindi}]{} \underline{v} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Ma allora $P_1 = I - \beta \underline{v}\underline{v}^H = \left[\begin{array}{cc|c} * & * & \underline{0} \\ * & * & \\ \hline \underline{0} & & I \end{array}\right] \in \mathcal{H}$

e lo stesso vale per le P_i con i generico; (non ho la stessa forma ma dng rimane $\in \mathcal{H}$)

Prendiamo $\underline{x}_2$ seconda colonna della matrice.

$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ \underline{0} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ * \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

→ ma io lavoro solo su questa parte, e poi estendo dopo per avere la dim giusta

e quindi $P_2 = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & & \underline{0}^H & \\ \hline \underline{0} & * & * & \underline{0}^H \\ & * & * & \\ \hline & & \underline{0} & I \end{array}\right]$

Cos'è $P_1 \cdot P_2$?

$$P_1 \cdot P_2 = \left[\begin{array}{cc|c} * & * & 0 \\ * & * & \\ \hline 0 & & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & & \underline{0}^H & \\ \hline \underline{0} & * & * & 0 \\ & * & * & \\ \hline & 0 & & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & 0 \\ * & * & * & \\ 0 & * & * & \\ \hline & 0 & & I \end{array}\right]$$

→ $[0\ 0\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ok.

(lo stesso vale per $P_i \cdot P_{i+1}$ generico)

Chiaramente $R_k \in \mathcal{H}$ dato che è triang. sup.

Rimane quindi da mostrare che $A_{k+1} = R_k Q_k \in \mathcal{H}$ dove $R_k, Q_k \in \mathcal{H}$

Chiamiamole solo R e Q tanto a noi il k ora non interessa e ci confonde!

$$RQ = (\underbrace{D_1}_{\text{diag}} + \underbrace{R_1}_{\text{triang sup strette}})(\underbrace{\tilde{L}_2}_{\text{triang inf stretta}} + D_2 + R_2)$$ (in realtà $\tilde{L}_2$ è $\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$)

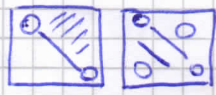
$$\stackrel{!}{=} \underbrace{D_1 Q}_{\in \mathcal{H}} + \tilde{R}_1 \tilde{L}_2 + \underbrace{\tilde{R}_1 D_2}_{} + \underbrace{\tilde{R}_1 \tilde{R}_2}_{}$$

→ le triang sono delle algebre quindi il prodotto rimane triang sup

molt per diag non cambia le cose

rimane triang sup strette → a maggior ragione $\in \mathcal{H}$

Rimane da esaminare $\tilde{R}_1 \tilde{L}_2$

 $= D_3 + \tilde{R}_3 \in \mathcal{H}$

perché il downshif aggiunge al max una sotto diagonale e siccome ho una diag stretta rimane in $\mathcal{H}$ ∎

13/11/2012

⑨

TEO: (di CONVERGENZA) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ t.c. $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \longrightarrow |\lambda_n| > 0$

$A = X \Lambda X^{-1}$ con X matrice autovettori. Facciamo anche l'ipotesi che X^{-1} ammetta fattorizzazione LU. (altrimenti la dim è difficile)

Allora $\exists$ S_k matrici di fase t.c.:

$$\lim_{k \to \infty} S_k^H R_k S_k = \lim_{k \to \infty} S_{k-1}^H A_k S_{k-1} = T \quad \text{triang. sup. con } \operatorname{diag}(T) = \Lambda_A$$

e

$$\lim_{k \to \infty} S_{k-1}^H Q_k S_k = I \quad \text{e quindi} \quad a_{ii}^{(k)} \longrightarrow \lambda_i(A).$$

OSS: il risultato che ci interessa è che gli elementi diagonali di A_k convergono agli autovalori, ma il teorema ci dice di più, ci dice a cosa converge tutta la matrice (circa, perché moltiplichiamo per le matrici di fase per "eliminare le oscillazioni" e garantire l'esistenza del limite), e ci dice che A^k tende a una triang sup (quella della forma di Schur).

dim: Consideriamo la matrice $A^k = A \cdot - A$ k volte. (potenza)
e vediamo 2 diverse fattorizzazioni QR di questa matrice

1) $A^k = H_k U_k$ con $H_k := \boxed{Q_1 \cdot - Q_k}$ matrice unitaria
$U_k := \boxed{R_k \cdot - \cdot R_1}$ triang. superiore
↳ sono quelle del metodo

2) $A^k = (\underbrace{Q P_k}_{\text{unitaria}})(\underbrace{T_k R D^k U}_{\text{triang sup.}})$

Dobbiamo mostrare che queste sono 2 fattorizzazioni QR di A^k.

(Osserviamo però che considerare A^k ha senso nell'ottica del fatto che vogliamo vedere anche l'ordine di convergenza, e non solo sapere che converge.)

1) Per induzione su k.

$k=1$ $\quad A = A_1 = H_1 U_1$ con $H_1 = Q$ $\quad U_1 = R$ fatt. QR di A ok

$k>1$ $\quad A_k = Q_k R_k$ (•)
$A_{k+1} = R_k Q_k$ $\Rightarrow Q_k A_{k+1} = Q_k R_k Q_k = A_k Q_k$

e quindi ottengo:

$$Q_1 Q_2 - Q_{k-1} Q_k A_{k+1} = Q_1 - \underbrace{Q_{k-1} A_k}_{= A_{k-1} Q_{k-1}} Q_k \qquad (*)$$

andando avanti

$$= A_1 Q_1 - Q_k$$

Abbiamo:

$$H_{k+1} U_{k+1} := (Q_1 - Q_{k+1})(R_{k+1} - R_1)$$

$$\overset{(\bullet)}{=} Q_1 - Q_k A_{k+1} R_k - R_1$$

$$\overset{(*)}{=} \underbrace{A_1}_{A} \underbrace{Q_1 - Q_k}_{H_k} \underbrace{R_k - R_1}_{U_k} = A \underbrace{H_k U_k}_{= A^k \text{ per hp di induzione}} = A \cdot A^k = A^{k+1}$$

Quindi abbiamo dimostrato che possiamo fattorizzare A^k come in (1). Vediamo (2):

2) $A = X \Lambda X^{-1}$ con $X^{-1} = LU$ (per hp)

$A^k = X \Lambda^k X^{-1} = X \Lambda^k L U = X \Lambda^k L \Lambda^{-k} \Lambda^k U$

Gli elementi di $\Lambda^k L \Lambda^{-k}$ sono nella forma

$$\begin{cases} \ell_{ij} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k & i > j \\ 1 & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(perché $\ell_{ii} = 1$ nella fatt. LU).

E quindi posso scrivere $\Lambda^k L \Lambda^{-k} = I + E_k$ con

$$\lim_{k \to \infty} E_k = 0$$

dato che gli autovalori sono ordinati.

E quindi $A^k = X(I+E_k)\Lambda^k U$

Ora consideriamo la fattorizzazione QR della matrice X : $X=QR$

$\Rightarrow A^k = QR(I+E_k)\Lambda^k U$

R^{-1} esiste perche' ho autovol tutti positivi

$= Q(R+RE_k)\Lambda^k U$

$= Q(I+RE_kR^{-1})R\Lambda^k U$

Faccio la fattorizzazione QR di $I+RE_kR^{-1} = \underset{\text{unitaria}}{P_k}\underset{\text{triang sup}}{T_k}$

$= \underbrace{QP_k}_{\substack{\text{unitaria perche' prodotto}\\ \text{di unitarie}}}\underbrace{T_kR\Lambda^kU}_{\substack{\text{triang. sup perche'}\\ \text{prodotto di triang. sup.}}}$

Ora che abbiamo le due fattorizzazioni possiamo confrontarle, sappiamo che $\exists$ una matrice di fase $\hat{S}_k$ t.c.

$$H_k = (QP_k)\hat{S}_k^H \quad (\blacktriangle)$$

$$U_k = \hat{S}_k(T_kR\Lambda^kU) \quad (\blacktriangle\blacktriangle)$$

Abbiamo:

$$Q_k \underset{\text{def } H_k}{=} H_{k-1}^{-1}H_k \underset{(\blacktriangle)}{=} \hat{S}_{k-1}P_{k-1}^HQ^HQP_k\hat{S}_k^H = \hat{S}_{k-1}P_{k-1}^HP_k\hat{S}_k^H$$

e quindi:

$$\hat{S}_{k-1}^HQ_k\hat{S}_k = P_{k-1}^HP_k \quad (\blacksquare)$$

Facciamo la stessa cosa per R_k:

$$R_k \underset{\text{def } U_k}{=} U_kU_{k-1}^{-1} \underset{(\blacktriangle\blacktriangle)}{=} \hat{S}_kT_kR\Lambda^kUU^{-1}\Lambda^{-k+1}R^{-1}T_{k-1}^{-1}\hat{S}_{k-1}^{-1}$$

$$= \hat{S}_kT_kR\Lambda R^{-1}T_{k-1}^{-1}\hat{S}_{k-1}^H$$

e quindi:

$$\hat{S}_k^HR_k\hat{S}_{k-1} = T_kR\Lambda R^{-1}T_{k-1}^{-1}. \quad (\blacksquare\blacksquare)$$

Ora abbiamo:

$$\lim_{k\to\infty} P_kT_k = \lim_{k\to\infty} I+RE_kR^{-1} = I$$

dato che $\lim E_k = 0$ ed R è costante.

dunque $\exists\ \tilde{S}_k$ matrice di fase tale che

$$\lim_{k\to\infty} P_k\tilde{S}_k = \lim_{k\to\infty}\tilde{S}_k^HT_k = I \quad (**)$$

(per una proprietà che dimostrerà dopo).

Pongo $S_k = \hat{S}_k\tilde{S}_k$. Abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} S_{k-1}^HQ_kS_k = \lim_{k\to\infty}\tilde{S}_{k-1}^H\hat{S}_{k-1}^HQ_k\hat{S}_k\tilde{S}_k$$

$$\overset{(\blacksquare)}{=} \lim_{k\to\infty}\tilde{S}_{k-1}^HP_{k-1}^HP_k\tilde{S}_k = \underbrace{\left(\lim_{k\to\infty}\tilde{S}_{k-1}^HP_{k-1}^H\right)\left(\lim_{k\to\infty}P_k\tilde{S}_k\right)}_{\text{per continuità}} \overset{(**)}{=} I \quad (*)$$

$$\lim_{k\to\infty} S_k^HR_kS_{k-1} = \lim_{k\to\infty}\tilde{S}_k^H\hat{S}_k^HR_k\hat{S}_{k-1}\tilde{S}_{k-1}$$

$$\overset{(\blacksquare\blacksquare)}{=} \lim_{k\to\infty}\tilde{S}_k^HT_kR\Lambda R^{-1}T_{k-1}^{-1}\tilde{S}_{k-1}$$

$(**)$

$$= \lim_{k\to\infty}\tilde{S}_k^HT_k\cdot\lim_{k\to\infty}R\Lambda R^{-1}\cdot\lim_{k\to\infty}T_{k-1}^{-1}\check{S}_{k-1} \overset{(**)}{=} R\Lambda R^{-1} = T \text{ triang sup.}$$

Manca l'ultimo limite:

$$\lim_{k\to\infty} S_{k-1}^H A_k S_{k-1} = \lim_{k\to\infty} S_{k-1}^H Q_k \overset{\cdot S_k S_k^H}{\vee} R_k S_{k-1}$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\lim_{k\to\infty} (S_{k-1}^H Q_k S_k)}_{= I \ (*)} \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} (S_k^H R_k S_{k-1})}_{= T \ (**)} = T$$

In particolare abbiamo:

$$\lim_{k\to\infty} a_{ii}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} (S_{k-1}^H A_k S_{k-1})_{ii} = (R \Lambda R^{-1})_{ii} = \lambda_i$$

perché sulla diagonale le S_{k-1} non influiscono

perché è una trasformaz. per similitudine

Rimane da dimostrare la proprietà che abbiamo usato (**).

PROP: $\{A_k\}$ t.c. $\lim_{k\to\infty} A_k = I$ $\quad A_k = Q_k R_k$. Allora $\exists\, S_k$ matrici di fase t.c.

- $\lim_{k\to\infty} Q_k S_k = \lim_{k\to\infty} S_k Q_k = I$
- $\lim_{k\to\infty} S_k^H R_k = \lim_{k\to\infty} R_k S_k^H = I$!

Premessa, se P è una matrice unitaria triangolare superiore allora P è una matrice di fase (e quindi è diagonale). Infatti:

$PP^H = P^H P \quad \leadsto$ 

$$i=1: \quad \sum_{j=1}^{n} |p_{1j}|^2 = |p_{11}|^2 \quad \Rightarrow \quad p_{12} = p_{13} = p_{14} = \dots = 0$$

$$i=2: \quad \sum_{j=2}^{n} |p_{2j}|^2 = \sum_{j=1}^{2} \bar{p}_{j2} \cdot p_{j2} = \underbrace{\cancel{|p_{12}|^2}}_{=0} + |p_{22}|^2 \quad \Rightarrow \quad p_{23} = p_{24} = \dots = 0$$

e quindi ricorsivamente vale per tutti gli i.

dim: (PROP) $A_k = Q_k R_k \longrightarrow I$

e quindi $Q_k R_k - I \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad R_k - Q_k^H \longrightarrow 0$

deve essere 0!

Ma allora deve essere $(Q_k^H)_{ij} \longrightarrow 0$ per $i > j$

ma per la premessa siccome Q_k è unitaria deve essere anche

$(Q_k^H)_{ij} \longrightarrow 0 \quad i < j$ e quindi per $i \neq j$.

$\exists\, S_k = \mathrm{diag}(\theta_i^{(k)})$ di fase con $\theta_i^{(k)} = \dfrac{\bar{q}_{ii}^{(k)}}{|q_{ii}^{(k)}|}$ e

$$\lim_{k\to\infty} S_k Q_k = \lim_{k\to\infty} Q_k S_k = I \quad \left(\text{ovvio perché ho: } \frac{\bar{q}_{ii}^{(k)}}{|q_{ii}^{(k)}|} \cdot q_{ii}^{(k)} = 1\right)$$

Devo mostrare che $\lim S_k^H R_k = \lim R_k S_k^H = I$. Ho

$$\underbrace{Q_k R_k}_{\downarrow\, I \text{ per hp}} = Q_k S_k S_k^H R_k \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(Q_k S_k)^{-1}}_{\downarrow\, I} \underbrace{(Q_k R_k)}_{\downarrow\, I} = \underbrace{S_k^H R_k}_{\text{dk deve tendere} \to I}$$

Analogamente:

$$S_k \underbrace{Q_k R_k}_{\downarrow\, I} S_k^H = S_k Q_k R_k S_k^H S_k S_k^H = \underbrace{S_k Q_k}_{\downarrow\, \text{TS prec}\ I} R_k S_k^H$$

$\downarrow$ I $\downarrow$ I perché se moltiplico per matrici di fase non cambia